



香港城市大學
City University of Hong Kong

專業 創新 胸懷全球
Professional · Creative
For The World

CityU Scholars

Un problème de confinement pour une coque membranaire linéairement élastique de type elliptique

Ciarlet, Philippe G; Mardare, Cristinel; Piersanti, Paolo

Published in:

Comptes Rendus Mathematique

Published: 01/10/2018

Document Version:

Final Published version, also known as Publisher's PDF, Publisher's Final version or Version of Record

License:

CC BY-NC-ND

Publication record in CityU Scholars:

[Go to record](#)

Published version (DOI):

[10.1016/j.crma.2018.08.002](https://doi.org/10.1016/j.crma.2018.08.002)

Publication details:

Ciarlet, P. G., Mardare, C., & Piersanti, P. (2018). Un problème de confinement pour une coque membranaire linéairement élastique de type elliptique. *Comptes Rendus Mathematique*, 356(10), 1040-1051. <https://doi.org/10.1016/j.crma.2018.08.002>

Citing this paper

Please note that where the full-text provided on CityU Scholars is the Post-print version (also known as Accepted Author Manuscript, Peer-reviewed or Author Final version), it may differ from the Final Published version. When citing, ensure that you check and use the publisher's definitive version for pagination and other details.

General rights

Copyright for the publications made accessible via the CityU Scholars portal is retained by the author(s) and/or other copyright owners and it is a condition of accessing these publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights. Users may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain.

Publisher permission

Permission for previously published items are in accordance with publisher's copyright policies sourced from the SHERPA RoMEO database. Links to full text versions (either Published or Post-print) are only available if corresponding publishers allow open access.

Take down policy

Contact lbscholars@cityu.edu.hk if you believe that this document breaches copyright and provide us with details. We will remove access to the work immediately and investigate your claim.



Problèmes mathématiques de la mécanique

Un problème de confinement pour une coque membranaire linéairement élastique de type elliptique

A confinement problem for a linearly elastic membrane shell of elliptic type

Philippe G. Ciarlet^a, Cristinel Mardare^b, Paolo Piersanti^a

^a Department of Mathematics, City University of Hong Kong, 83 Tat Chee Avenue, Kowloon, Hong Kong

^b Sorbonne Université, CNRS, laboratoire Jacques-Louis-Lions, LJLL, F-75005 Paris, France

INFO ARTICLE

Historique de l'article :

Reçu le 30 août 2018

Accepté le 30 août 2018

Disponible sur Internet le 17 septembre 2018

Présenté par Philippe G. Ciarlet

RÉSUMÉ

On identifie, et justifie rigoureusement par une analyse asymptotique, les inéquations variationnelles du problème bidimensionnel satisfait par le champ des déplacements d'une coque membranaire linéairement élastique du type elliptique soumise à une condition de confinement à l'intérieur d'un demi-espace. Ce type de condition diffère notablement de la condition du Signorini habituellement imposée sur la « face inférieure » de la coque.

© 2018 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Cet article est publié en Open Access sous licence CC BY-NC-ND (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>).

ABSTRACT

We identify, and rigorously justify by an asymptotic analysis, the variational inequalities of the two-dimensional problem satisfied by the displacement field of a linearly elastic membrane shell of elliptic type subjected to a confinement condition inside a half-space. This type of condition substantially differs from the Signorini condition usually imposed on the “lower face” of the shell.

© 2018 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Cet article est publié en Open Access sous licence CC BY-NC-ND (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>).

1. Préliminaires

Les indices latins varient dans l'ensemble $\{1, 2, 3\}$ et les indices grecs dans l'ensemble $\{1, 2\}$, et ils vérifient la convention habituelle de sommation des indices répétés. La notation \mathbb{E}^3 désigne l'espace euclidien tridimensionnel. Les notations \cdot , \wedge , $|\cdot|$ désignent le produit scalaire, le produit vectoriel et la norme euclidienne dans \mathbb{E}^3 .

Un domaine de \mathbb{R}^n est un ouvert borné et connexe de \mathbb{R}^n , dont la frontière $\partial\Omega$ est lipschitzienne, l'ouvert Ω étant localement d'un même côté de $\partial\Omega$. Les notations $\mathcal{D}(\Omega)$ et $\mathcal{D}'(\Omega)$ désignent respectivement l'espace des fonctions de classe \mathcal{C}^∞ à support compact dans Ω et l'espace des distributions dans Ω .

Adresses e-mail : mapgc@cityu.edu.hk (P.G. Ciarlet), mardare@ann.jussieu.fr (C. Mardare), ppersan-c@my.cityu.edu.hk (P. Piersanti).

<https://doi.org/10.1016/j.crma.2018.08.002>

1631-073X/© 2018 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Cet article est publié en Open Access sous licence CC BY-NC-ND (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>).

Soit ω un domaine de \mathbb{R}^2 , de point générique $y = (y_\alpha)$. On note $\partial_\alpha := \partial/\partial y_\alpha$ et $\partial_{\alpha\beta} := \partial^2/\partial y_\alpha \partial y_\beta$. Soit $\theta \in C^1(\bar{\omega}; \mathbb{E}^3)$ une immersion. Alors $\theta(\bar{\omega})$ est une surface de \mathbb{E}^3 , munie des coordonnées curvilignes y_1 et y_2 . Étant donné $y \in \bar{\omega}$, les deux vecteurs

$$\mathbf{a}_\alpha(y) := \partial_\alpha \theta(y)$$

forment une base du plan tangent à $\theta(\bar{\omega})$ au point $\theta(y)$, et les trois vecteurs $\mathbf{a}_i(y)$, où

$$\mathbf{a}_3(y) := \frac{\mathbf{a}_1(y) \wedge \mathbf{a}_2(y)}{|\mathbf{a}_1(y) \wedge \mathbf{a}_2(y)|},$$

forment la base covariante au point $\theta(y)$, la base contravariante au même point étant formée par les trois vecteurs $\mathbf{a}^j(y)$ définis par les relations

$$\mathbf{a}^j(y) \cdot \mathbf{a}_i(y) = \delta_i^j.$$

La première forme fondamentale de la surface $\theta(\bar{\omega})$ est définie par ses composantes covariantes

$$a_{\alpha\beta} := \mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}_\beta = a_{\beta\alpha} \in C^0(\bar{\omega}),$$

ou contravariantes

$$a^{\alpha\beta} := \mathbf{a}^\alpha \cdot \mathbf{a}^\beta = a^{\beta\alpha} \in C^0(\bar{\omega}).$$

L'élément d'aire le long de $\theta(\bar{\omega})$ est défini en chaque point $\theta(y)$, $y \in \bar{\omega}$, par $\sqrt{a(y)}dy$, où

$$a := \det(a_{\alpha\beta}) \in C^0(\bar{\omega}).$$

Soit $\theta \in C^2(\bar{\omega}, \mathbb{E}^3)$ une immersion. La seconde forme fondamentale de la surface $\theta(\bar{\omega})$ est définie par ses composantes covariantes

$$b_{\alpha\beta} := \partial_\alpha \mathbf{a}_\beta \cdot \mathbf{a}_3 = -\mathbf{a}_\beta \cdot \partial_\alpha \mathbf{a}_3 = b_{\beta\alpha} \in C^0(\bar{\omega}),$$

ou par ses composantes mixtes

$$b_\alpha^\beta := a^{\beta\sigma} b_{\alpha\sigma} \in C^0(\bar{\omega}),$$

et les symboles de Christoffel associés à l'immersion θ sont définis par

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\sigma := \partial_\alpha \mathbf{a}_\beta \cdot \mathbf{a}^\sigma = \Gamma_{\beta\alpha}^\sigma \in C^0(\bar{\omega}).$$

Enfin, la courbure de Gauss en chaque point $\theta(y)$, $y \in \bar{\omega}$, de la surface $\theta(\bar{\omega})$ est définie par

$$\kappa(y) := \frac{\det(b_{\alpha\beta}(y))}{\det(a_{\alpha\beta}(y))} = \det(b_\alpha^\beta(y)).$$

Étant donné une immersion $\theta \in C^2(\bar{\omega}; \mathbb{E}^3)$ et un champ de vecteurs $\eta = (\eta_i) \in C^1(\bar{\omega}; \mathbb{R}^3)$, le champ de vecteurs

$$\tilde{\eta} := \eta_i \mathbf{a}^i$$

peut être interprété comme un champ de déplacements de la surface $\theta(\bar{\omega})$. Si $(\theta + \eta_i \mathbf{a}^i) \in C^1(\bar{\omega}, \mathbb{E}^3)$ est aussi une immersion, les composantes covariantes de la première forme fondamentale de la surface déformée $(\theta + \tilde{\eta})(\bar{\omega})$ sont données par

$$\begin{aligned} a_{\alpha\beta}(\eta) &:= (\mathbf{a}_\alpha + \partial_\alpha \tilde{\eta}) \cdot (\mathbf{a}_\beta + \partial_\beta \tilde{\eta}) \\ &= a_{\alpha\beta} + \mathbf{a}_\alpha \cdot \partial_\beta \tilde{\eta} + \partial_\alpha \tilde{\eta} \cdot \mathbf{a}_\beta + \partial_\alpha \tilde{\eta} \cdot \partial_\beta \tilde{\eta} \in C^0(\bar{\omega}). \end{aligned}$$

Alors, la partie linéaire par rapport à $\tilde{\eta}$ de la différence $\frac{1}{2}(a_{\alpha\beta}(\eta) - a_{\alpha\beta})$ est appelée le tenseur linéarisé des déformations, ou de changement de métrique, associé au champ $\tilde{\eta}$, et ses composantes covariantes sont données par

$$\gamma_{\alpha\beta}(\eta) := \frac{1}{2} (\mathbf{a}_\alpha \cdot \partial_\beta \tilde{\eta} + \partial_\alpha \tilde{\eta} \cdot \mathbf{a}_\beta) = \frac{1}{2} (\partial_\beta \eta_\alpha + \partial_\alpha \eta_\beta) - \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma \eta_\sigma - b_{\alpha\beta} \eta_3 = \gamma_{\beta\alpha}(\eta) \in C^0(\bar{\omega}).$$

Étant donné une immersion $\theta \in C^2(\bar{\omega}; \mathbb{E}^3)$, on dit que la surface $\theta(\bar{\omega})$ est elliptique s'il existe une constante κ_0 telle que

$$0 < \kappa_0 \leq \kappa(y) \text{ pour tout } y \in \bar{\omega}.$$

Le résultat suivant (dû à [5] et [8]; voir aussi [1, Th. 2.7-3]) constitue un exemple d'inégalité de Korn sur une surface; elle joue un rôle fondamental dans l'analyse asymptotique qui suivra.

Théorème 1.1. Soit ω un domaine de \mathbb{R}^2 et $\theta \in C^3(\overline{\omega}; \mathbb{E}^3)$ une immersion telle que la surface $\theta(\overline{\omega})$ soit elliptique. On définit l'espace

$$\mathbf{V}_M(\omega) := H_0^1(\omega) \times H_0^1(\omega) \times L^2(\omega).$$

Alors, il existe une constante c_0 telle que

$$\left\{ \sum_{\alpha} \|\eta_{\alpha}\|_{H^1(\omega)}^2 + \|\eta_3\|_{L^2(\omega)}^2 \right\}^{1/2} \leq c_0 \left\{ \sum_{\alpha, \beta} \|\gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta})\|_{L^2(\omega)}^2 \right\}^{1/2}$$

pour tout $\boldsymbol{\eta} = (\eta_i) \in \mathbf{V}_M(\omega)$. \square

2. Un problème tridimensionnel de confinement pour une coque

Soit ω un domaine de \mathbb{R}^2 . On pose $\gamma := \partial\omega$ et on note γ_0 un sous-ensemble non vide de γ , relativement ouvert dans γ . Pour chaque $\varepsilon > 0$, on définit les ensembles

$$\Omega^{\varepsilon} = \omega \times]-\varepsilon, \varepsilon[\text{ et } \Gamma_0^{\varepsilon} := \gamma_0 \times]-\varepsilon, \varepsilon[,$$

on note $x^{\varepsilon} = (x_i^{\varepsilon})$ un point générique de $\overline{\Omega^{\varepsilon}}$, et on pose $\partial_i^{\varepsilon} := \partial/\partial x_i^{\varepsilon}$; on a donc $x_{\alpha}^{\varepsilon} = y_{\alpha}$ et $\partial_{\alpha}^{\varepsilon} = \partial_{\alpha}$.

Étant donné une immersion $\theta \in C^3(\overline{\omega}; \mathbb{E}^3)$ et $\varepsilon > 0$, on considère une coque de surface moyenne $\theta(\overline{\omega})$ et d'épaisseur constante $2\varepsilon > 0$. La configuration de référence de la coque est donc l'ensemble $\Theta(\overline{\Omega^{\varepsilon}})$, où

$$\Theta(x^{\varepsilon}) := \theta(y) + x_3^{\varepsilon} \mathbf{a}^3(y) \text{ à chaque point } x^{\varepsilon} = (y, x_3^{\varepsilon}) \in \overline{\Omega^{\varepsilon}}.$$

On montre (cf. [1, Th. 3.1-1]) que, si $\varepsilon > 0$ est suffisamment petit, l'application $\Theta \in C^2(\overline{\Omega^{\varepsilon}}; \mathbb{E}^3)$ ainsi définie est une immersion. Alors, les trois vecteurs

$$\mathbf{g}_i^{\varepsilon}(x^{\varepsilon}) := \partial_i^{\varepsilon} \Theta(x^{\varepsilon})$$

forment la base covariante au point $\Theta(x^{\varepsilon})$, $x^{\varepsilon} \in \overline{\Omega^{\varepsilon}}$, la base contravariante au même point étant formée des trois vecteurs $\mathbf{g}^{j,\varepsilon}(x^{\varepsilon})$ définis par les relations

$$\mathbf{g}^{j,\varepsilon}(x^{\varepsilon}) \cdot \mathbf{g}_i^{\varepsilon}(x^{\varepsilon}) = \delta_i^j.$$

Le tenseur métrique associé à l'immersion Θ est défini par ses composantes covariantes

$$g_{ij}^{\varepsilon} := \mathbf{g}_i^{\varepsilon} \cdot \mathbf{g}_j^{\varepsilon} \in C^1(\overline{\Omega^{\varepsilon}}),$$

ou par ses composantes contravariantes

$$g^{ij,\varepsilon} := \mathbf{g}^{i,\varepsilon} \cdot \mathbf{g}^{j,\varepsilon} \in C^1(\overline{\Omega^{\varepsilon}}).$$

L'élément de volume en chaque point $\Theta(x^{\varepsilon})$ est $\sqrt{g^{\varepsilon}(x^{\varepsilon})} dx^{\varepsilon}$, où

$$g^{\varepsilon} := \det(g_{ij}^{\varepsilon}) \in C^1(\overline{\Omega^{\varepsilon}}).$$

Les symboles de Christoffel associés à l'immersion Θ sont définis par

$$\Gamma_{ij}^{p,\varepsilon} := \partial_i \mathbf{g}_j^{\varepsilon} \cdot \mathbf{g}^{p,\varepsilon} = \Gamma_{ji}^{p,\varepsilon} \in C^0(\overline{\Omega^{\varepsilon}}).$$

Étant donné un champ de vecteurs $\mathbf{v}^{\varepsilon} = (v_i^{\varepsilon}) \in C^1(\overline{\Omega^{\varepsilon}}; \mathbb{R}^3)$, le champ de vecteurs

$$\tilde{\mathbf{v}}^{\varepsilon} := v_i^{\varepsilon} \mathbf{g}^{i,\varepsilon}$$

peut être interprété comme un champ de déplacements de la configuration de référence $\Theta(\overline{\Omega^{\varepsilon}})$. Si $(\Theta + \tilde{\mathbf{v}}^{\varepsilon}) \in C^1(\overline{\Omega^{\varepsilon}}; \mathbb{E}^3)$ est aussi une immersion, les composantes covariantes du tenseur métrique de la configuration déformée $(\Theta + \tilde{\mathbf{v}}^{\varepsilon})(\overline{\Omega^{\varepsilon}})$ sont données par

$$\begin{aligned} g_{ij}^{\varepsilon}(\mathbf{v}^{\varepsilon}) &:= (\mathbf{g}_i^{\varepsilon} + \partial_i^{\varepsilon} \tilde{\mathbf{v}}^{\varepsilon}) \cdot (\mathbf{g}_j^{\varepsilon} + \partial_j^{\varepsilon} \tilde{\mathbf{v}}^{\varepsilon}) \\ &= g_{ij}^{\varepsilon} + \mathbf{g}_i^{\varepsilon} \cdot \partial_j^{\varepsilon} \tilde{\mathbf{v}}^{\varepsilon} + \partial_i^{\varepsilon} \tilde{\mathbf{v}}^{\varepsilon} \cdot \mathbf{g}_j^{\varepsilon} + \partial_i^{\varepsilon} \tilde{\mathbf{v}}^{\varepsilon} \cdot \partial_j^{\varepsilon} \tilde{\mathbf{v}}^{\varepsilon} \in C^0(\overline{\Omega^{\varepsilon}}). \end{aligned}$$

Alors, la partie linéaire par rapport à $\tilde{\mathbf{v}}^{\varepsilon}$ de la différence $\frac{1}{2}(g_{ij}^{\varepsilon}(\mathbf{v}^{\varepsilon}) - g_{ij}^{\varepsilon})$ est appelée le tenseur linéarisé des déformations, ou de changement de métrique, associé au champ $\tilde{\mathbf{v}}^{\varepsilon}$, et ses composantes covariantes sont données par

$$e_{i||j}^\varepsilon(\mathbf{v}^\varepsilon) := \frac{1}{2} \left(\mathbf{g}_i^\varepsilon \cdot \partial_j^\varepsilon \tilde{\mathbf{v}}^\varepsilon + \partial_i^\varepsilon \tilde{\mathbf{v}}^\varepsilon \cdot \mathbf{g}_j^\varepsilon \right) = \frac{1}{2} (\partial_j^\varepsilon v_i^\varepsilon + \partial_i^\varepsilon v_j^\varepsilon) - \Gamma_{ij}^{p,\varepsilon} v_p^\varepsilon = e_{j||i}^\varepsilon(\mathbf{v}^\varepsilon) \in C^0(\overline{\Omega^\varepsilon}).$$

Dans toute la suite de la Note, on suppose que, pour chaque $\varepsilon > 0$, la configuration de référence $\Theta(\overline{\Omega^\varepsilon})$ est un *état naturel* et que le matériau constituant la coque est *linéairement élastique, homogène et isotrope*, et donc caractérisé par ses deux constantes de Lamé $\lambda \geq 0$ et $\mu > 0$. On suppose aussi que, pour chaque $\varepsilon > 0$, la coque est soumise à des forces de volume de densité $f^{i,\varepsilon} \mathbf{g}_i^\varepsilon$, où $(f^{i,\varepsilon}) \in L^2(\Omega^\varepsilon; \mathbb{R}^3)$, et assujettie à une *condition aux limites de placement* le long de la partie Γ_0^ε de sa face latérale. On suppose enfin que, pour chaque $\varepsilon > 0$, la coque est soumise à une *condition de confinement*, exprimant que les champs de déplacements admissibles $v_i^\varepsilon \mathbf{g}^{i,\varepsilon}$ doivent être tels que les configurations déformées correspondantes restent dans le demi-espace

$$\mathbb{H} := \{ \mathbf{x} \in \mathbb{E}^3; \mathbf{ox} \cdot \mathbf{p} \geq 0 \},$$

où $\mathbf{p} \in \mathbb{E}^3$ est un vecteur non nul donné une fois pour toutes. Autrement dit, tout champ de déplacements admissibles $v_i^\varepsilon \mathbf{g}^{i,\varepsilon}$ doit vérifier

$$\left(\Theta(\mathbf{x}^\varepsilon) + v_i^\varepsilon(\mathbf{x}^\varepsilon) \mathbf{g}^{i,\varepsilon}(\mathbf{x}^\varepsilon) \right) \cdot \mathbf{p} \geq 0$$

pour tout $\mathbf{x}^\varepsilon \in \overline{\Omega^\varepsilon}$, ou pour presque tout $\mathbf{x}^\varepsilon \in \Omega^\varepsilon$ si les fonctions v_i^ε appartiennent seulement à l'espace $H^1(\Omega^\varepsilon)$. Naturellement, on supposera que

$$\Theta(\overline{\Omega^\varepsilon}) \subset \mathbb{H}.$$

Cette condition de *confinement* est donc *très différente*, et plus satisfaisante physiquement que celle-ci, de la condition de *Signorini* considérée d'habitude, où seuls les points de la « face inférieure » de la configuration déformée sont assujettis à une condition unilatérale (cf., par exemple, [11], [12], [13]). En revanche, une telle condition de confinement rend l'analyse asymptotique plus difficile.

Soit

$$A^{ijkl,\varepsilon} := \lambda g^{ij,\varepsilon} g^{kl,\varepsilon} + \mu \left(g^{ik,\varepsilon} g^{jl,\varepsilon} + g^{il,\varepsilon} g^{jk,\varepsilon} \right) = A^{jkl,i,\varepsilon} = A^{klij,\varepsilon} \in C^1(\overline{\Omega^\varepsilon})$$

les composantes contravariantes du tenseur d'élasticité associé au matériau considéré. L'inconnue du problème est le champ de vecteurs $\mathbf{u}^\varepsilon = (u_i^\varepsilon)$, où les fonctions $u_i^\varepsilon : \overline{\Omega^\varepsilon} \rightarrow \mathbb{R}$ sont les composantes covariantes du champ de déplacements de la configuration de référence. Alors, ce champ inconnu doit minimiser l'énergie $J^\varepsilon : \mathbf{H}^1(\Omega^\varepsilon) := H^1(\Omega^\varepsilon; \mathbb{R}^3) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$J^\varepsilon(\mathbf{v}^\varepsilon) := \frac{1}{2} \int_{\Omega^\varepsilon} A^{ijkl,\varepsilon} e_{k||l}^\varepsilon(\mathbf{v}^\varepsilon) e_{i||j}^\varepsilon(\mathbf{v}^\varepsilon) \sqrt{g^\varepsilon} dx^\varepsilon - \int_{\Omega^\varepsilon} f^{i,\varepsilon} v_i^\varepsilon \sqrt{g^\varepsilon} dx^\varepsilon$$

pour tout champ de déplacements admissible $v_i^\varepsilon \mathbf{g}^{i,\varepsilon}$, c'est-à-dire dont les coefficients $\mathbf{v} = (v_i^\varepsilon)$ appartient à l'ensemble

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(\Omega^\varepsilon) &:= \{ \mathbf{v}^\varepsilon = (v_i^\varepsilon) \in \mathbf{H}^1(\Omega^\varepsilon); \mathbf{v}^\varepsilon = \mathbf{0} \text{ on } \Gamma_0^\varepsilon, \\ &\quad (\Theta(\mathbf{x}^\varepsilon) + v_i^\varepsilon(\mathbf{x}^\varepsilon) \mathbf{g}^{i,\varepsilon}(\mathbf{x}^\varepsilon)) \cdot \mathbf{p} \geq 0 \text{ pour presque tout } \mathbf{x}^\varepsilon \in \Omega^\varepsilon \}. \end{aligned}$$

L'existence et l'unicité de la solution de ce problème de minimisation sont faciles à établir.

Théorème 2.1. *Il existe un et un seul champ de vecteurs $\mathbf{u}^\varepsilon \in \mathbf{U}(\Omega^\varepsilon)$ tel que*

$$J^\varepsilon(\mathbf{u}^\varepsilon) = \inf_{\mathbf{v}^\varepsilon \in \mathbf{U}(\Omega^\varepsilon)} J^\varepsilon(\mathbf{v}^\varepsilon).$$

Ce champ \mathbf{u}^ε est aussi la solution unique du problème $\mathcal{P}(\Omega^\varepsilon)$ suivant : trouver $\mathbf{u}^\varepsilon \in \mathbf{U}(\Omega^\varepsilon)$ qui vérifie les inéquations variationnelles

$$\int_{\Omega^\varepsilon} A^{ijkl,\varepsilon} e_{k||l}^\varepsilon(\mathbf{u}^\varepsilon) \left(e_{i||j}^\varepsilon(\mathbf{v}^\varepsilon) - e_{i||j}^\varepsilon(\mathbf{u}^\varepsilon) \right) \sqrt{g^\varepsilon} dx^\varepsilon \geq \int_{\Omega^\varepsilon} f^{i,\varepsilon} (v_i^\varepsilon - u_i^\varepsilon) \sqrt{g^\varepsilon} dx^\varepsilon$$

pour tout $\mathbf{v}^\varepsilon = (v_i^\varepsilon) \in \mathbf{U}(\Omega^\varepsilon)$.

Démonstration. L'ensemble $\mathbf{U}(\Omega^\varepsilon)$ est non vide (par hypothèse), convexe, et fermé dans $\mathbf{H}^1(\Omega^\varepsilon)$. La définie positivité uniforme du tenseur d'élasticité ($A^{ijkl,\varepsilon}$) et l'inégalité de Korn en coordonnées curvilignes (cf. [2, Th. 3.8-3 et Th. 3.9-1]) montrent alors que l'on peut utiliser le théorème classique de minimisation d'une fonctionnelle quadratique coercive sur un ensemble convexe fermé non vide et sa caractérisation au moyen d'inéquations variationnelles (cf., par exemple, [3], [9] ou [10]). □

3. Le problème tridimensionnel mis à l'échelle pour une famille de coques membranaires linéairement élastiques de type elliptique

Une coque linéairement élastique est dite *membranaire de type elliptique* si $\gamma_0 = \gamma$ et si la surface moyenne $\theta(\bar{\omega})$ est elliptique, au sens défini dans la Sect. 1.

On considère le problème de confinement défini comme dans la Sect. 2 pour une famille de telles coques, ayant toutes la même surface moyenne $\theta(\bar{\omega})$ et dont l'épaisseur $2\varepsilon > 0$ est considérée comme un paramètre approchant zéro. Comme il est classique depuis [4], on met à l'échelle chaque problème $\mathcal{P}(\Omega^\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$. À cette fin, on commence par définir l'ouvert fixe

$$\Omega := \omega \times]-1, 1[,$$

on note $x = (x_i)$ un point générique de l'ensemble $\bar{\Omega}$, on pose $\partial_i := \partial/\partial x_i$, et à chaque point $x = (x_i) \in \bar{\Omega}$, on associe le point $x^\varepsilon = (x_i^\varepsilon) \in \bar{\Omega}^\varepsilon$ défini par

$$x_\alpha^\varepsilon := x_\alpha = y_\alpha \text{ et } x_3^\varepsilon := \varepsilon x_3.$$

À l'inconnue $\mathbf{u}^\varepsilon = (u_i^\varepsilon)$ et aux champs admissibles $\mathbf{v}^\varepsilon = (v_i^\varepsilon)$, on associe ensuite l'inconnue mise à l'échelle $\mathbf{u}(\varepsilon) = (u_i(\varepsilon))$ et les champs admissibles mis à l'échelle, en posant

$$u_i(\varepsilon)(x) := u_i^\varepsilon(x^\varepsilon) \text{ et } v_i(x) := v_i^\varepsilon(x^\varepsilon)$$

en chaque point $x \in \bar{\Omega}$; finalement, on suppose qu'il existe des fonctions $f^i \in L^2(\Omega)$ indépendantes de ε telles que

$$f^{i,\varepsilon}(x^\varepsilon) = f^i(x) \text{ pour presque tout } x \in \Omega.$$

Le point de départ de notre analyse asymptotique est le problème $\mathcal{P}(\varepsilon; \Omega)$ décrit ci-dessous.

Théorème 3.1. Pour chaque $\varepsilon > 0$, on définit l'ensemble

$$\mathbf{U}(\varepsilon; \Omega) := \{ \mathbf{v} = (v_i) \in \mathbf{H}^1(\Omega); \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ sur } \gamma \times]-1, 1[, \\ (\theta(y) + \varepsilon x_3 \mathbf{a}_3(y) + v_i(x) \mathbf{g}^i(\varepsilon)(x)) \cdot \mathbf{p} \geq 0 \text{ pour presque tout } x = (y, x_3) \in \Omega \},$$

où

$$\mathbf{g}^i(\varepsilon)(x) := \mathbf{g}^{i,\varepsilon}(x^\varepsilon) \text{ à chaque } x \in \bar{\Omega}.$$

Alors, l'inconnue mise à l'échelle $\mathbf{u}(\varepsilon)$ est la solution unique du problème $\mathcal{P}(\varepsilon; \Omega)$ suivant : trouver $\mathbf{u}(\varepsilon) \in \mathbf{U}(\varepsilon, \Omega)$ qui vérifie les inéquations variationnelles

$$\int_{\Omega} A^{ijkl}(\varepsilon) e_{k||\ell}(\varepsilon; \mathbf{u}(\varepsilon)) (e_{i||j}(\varepsilon; \mathbf{v}) - e_{i||j}(\varepsilon; \mathbf{u}(\varepsilon))) \sqrt{g(\varepsilon)} dx \\ \geq \int_{\Omega} f^i (v_i - u_i(\varepsilon)) \sqrt{g(\varepsilon)} dx \text{ pour tout } \mathbf{v} \in \mathbf{U}(\varepsilon; \Omega),$$

où

$$g(\varepsilon)(x) := g^\varepsilon(x^\varepsilon) \text{ et } A^{ijkl}(\varepsilon)(x) := A^{ijkl,\varepsilon}(x^\varepsilon) \text{ à chaque } x \in \bar{\Omega}, \\ e_{\alpha||\beta}(\varepsilon; \mathbf{v}) := \frac{1}{2}(\partial_\beta v_\alpha + \partial_\alpha v_\beta) - \Gamma_{\alpha\beta}^k(\varepsilon) v_k = e_{\beta||\alpha}(\varepsilon; \mathbf{v}), \\ e_{\alpha||3}(\varepsilon; \mathbf{v}) := \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\varepsilon} \partial_3 v_\alpha + \partial_\alpha v_3 \right) - \Gamma_{\alpha 3}^\sigma(\varepsilon) v_\sigma = e_{3||\alpha}(\varepsilon; \mathbf{v}), \\ e_{3||3}(\varepsilon; \mathbf{v}) := \frac{1}{\varepsilon} \partial_3 v_3,$$

où

$$\Gamma_{ij}^p(\varepsilon)(x) := \Gamma_{ij}^{p,\varepsilon}(x^\varepsilon) \text{ à chaque } x \in \bar{\Omega}.$$

Démonstration. Il suffit de mettre à l'échelle le problème $\mathcal{P}(\Omega^\varepsilon)$ (Théorème 2.1). \square

On pose également

$$\mathbf{g}_i(\varepsilon)(x) := \mathbf{g}_i^\varepsilon(x^\varepsilon) \text{ à chaque } x \in \overline{\Omega}.$$

Le théorème qui suit décrit le comportement asymptotique lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ des diverses fonctions apparaissant dans la formulation du problème $\mathcal{P}(\varepsilon; \Omega)$. Les symboles $O(\varepsilon)$ et $O(\varepsilon^2)$ sont à comprendre au sens de la norme de l'espace $C^0(\overline{\Omega})$.

Théorème 3.2. Les fonctions $A^{ijkl}(\varepsilon) = A^{jkl}(\varepsilon) = A^{klij}(\varepsilon)$ vérifient

$$A^{ijkl}(\varepsilon) = A^{ijkl}(0) + O(\varepsilon), \quad A^{\alpha\beta\sigma 3}(\varepsilon) = A^{\alpha 333}(\varepsilon) = 0,$$

où

$$\begin{aligned} A^{\alpha\beta\sigma\tau}(0) &= \lambda a^{\alpha\beta} a^{\sigma\tau} + \mu(a^{\alpha\sigma} a^{\beta\tau} + a^{\alpha\tau} a^{\beta\sigma}), \\ A^{\alpha\beta 33}(0) &= \lambda a^{\alpha\beta}, \quad A^{\alpha 3\sigma 3}(0) = \mu a^{\alpha\sigma}, \quad A^{3333}(0) = \lambda + 2\mu. \end{aligned}$$

Les fonctions $\Gamma_{ij}^p(\varepsilon)$ et $g(\varepsilon)$ vérifient

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma(\varepsilon) &= \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma - \varepsilon x_3(\partial_\alpha b_\beta^\sigma + \Gamma_{\alpha\tau}^\sigma b_\beta^\tau - \Gamma_{\alpha\beta}^\tau b_\tau^\sigma) + O(\varepsilon^2), \\ \Gamma_{\alpha\beta}^3(\varepsilon) &= b_{\alpha\beta} - \varepsilon x_3 b_\alpha^\sigma b_{\sigma\beta}, \quad \partial_3 \Gamma_{\alpha\beta}^p(\varepsilon) = O(\varepsilon), \\ \Gamma_{\alpha 3}^\sigma(\varepsilon) &= -b_\alpha^\sigma - \varepsilon x_3 b_\alpha^\tau b_\tau^\sigma + O(\varepsilon^2), \quad \Gamma_{\alpha 3}^3(\varepsilon) = \Gamma_{33}^p(\varepsilon) = 0, \\ g(\varepsilon) &= a + O(\varepsilon). \end{aligned}$$

Il existe donc des constantes $\varepsilon_0 > 0$, C_0 , g_0 , et g_1 , telles que

$$0 < g_0 \leq g(\varepsilon)(x) \leq g_1 \text{ et } \sum_{i,j} |t_{ij}|^2 \leq C_0 A^{ijkl}(\varepsilon)(x) t_{kl} t_{ij}$$

pour tout $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ et $x \in \overline{\Omega}$, et pour toute matrice symétrique (t_{ij}) .

Les champs de vecteurs $\mathbf{g}_i(\varepsilon)$ et $\mathbf{g}^j(\varepsilon)$ vérifient

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_\alpha(\varepsilon) &= \mathbf{a}_\alpha - \varepsilon x_3 b_\alpha^\sigma \mathbf{a}_\sigma, \quad \mathbf{g}_3(\varepsilon) = \mathbf{a}_3, \\ \mathbf{g}^\alpha(\varepsilon) &= \mathbf{a}^\alpha + \varepsilon x_3 b_\alpha^\sigma \mathbf{a}^\sigma + O(\varepsilon^2), \quad \mathbf{g}^3(\varepsilon) = \mathbf{a}^3. \end{aligned}$$

Démonstration. Voir les preuves des Théorèmes 3.3-1 et 3.3-2 de [1]. \square

Le résultat suivant (dû à [6, Th. 4.1]; voir aussi [1, Th. 4.3-1]) constitue un exemple d'inégalité de Korn pour une famille de coques du type considéré ici; elle joue un rôle fondamental dans l'analyse asymptotique qui suit.

Théorème 3.3. On considère une famille de coques membranaires linéairement élastiques de type elliptique, ayant toutes la même surface moyenne $\theta(\overline{\omega})$ et d'épaisseur $2\varepsilon > 0$. On définit l'espace

$$\mathbf{V}(\Omega) := \{\mathbf{v} = (v_i) \in \mathbf{H}^1(\Omega); \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ sur } \gamma \times]-1, 1[\}.$$

Alors, il existe des constantes $\varepsilon_1 > 0$ et $C_1 > 0$ telles que

$$\left\{ \sum_\alpha \|v_\alpha\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|v_3\|_{L^2(\Omega)}^2 \right\}^{1/2} \leq C_1 \left\{ \sum_{i,j} \|e_{i||j}(\varepsilon; \mathbf{v})\|_{L^2(\Omega)}^2 \right\}^{1/2}$$

pour tout $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$ et pour tout $\mathbf{v} \in \mathbf{V}(\Omega)$. \square

4. Analyse asymptotique de la solution $u(\varepsilon)$ du problème $\mathcal{P}(\varepsilon; \Omega)$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$

Le résultat qui suit constitue le résultat essentiel de cette Note.

Théorème 4.1. Soit ω un domaine de \mathbb{R}^2 , soit $\theta \in C^3(\overline{\omega}; \mathbb{E}^3)$ une immersion telle que la surface $\theta(\overline{\omega})$ soit elliptique, et soit $\mathbf{p} \in \mathbb{E}^3$ un vecteur non nul. On définit l'espace et les deux ensembles suivants :

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_M(\omega) &:= H_0^1(\omega) \times H_0^1(\omega) \times L^2(\omega), \\ \mathbf{U}_M(\omega) &:= \{\boldsymbol{\eta} = (\eta_i) \in H_0^1(\omega) \times H_0^1(\omega) \times L^2(\omega); \\ &\quad (\boldsymbol{\theta}(y) + \eta_i(y)\mathbf{a}^i(y)) \cdot \mathbf{p} \geq 0 \text{ pour presque tout } y \in \omega\}, \\ \tilde{\mathbf{U}}_M(\omega) &:= \{\boldsymbol{\eta} = (\eta_i) \in H_0^1(\omega) \times H_0^1(\omega) \times H_0^1(\omega); \\ &\quad (\boldsymbol{\theta}(y) + \eta_i(y)\mathbf{a}^i(y)) \cdot \mathbf{p} \geq 0 \text{ pour presque tout } y \in \omega\}. \end{aligned}$$

On suppose que l'immersion $\boldsymbol{\theta}$ est telle que

$$d := \inf_{y \in \bar{\omega}} (\boldsymbol{\theta}(y) \cdot \mathbf{p}) > 0,$$

et qu'elle vérifie « l'hypothèse de densité » suivante : l'ensemble $\tilde{\mathbf{U}}_M(\omega)$ est dense dans l'ensemble $\mathbf{U}_M(\omega)$ muni de la norme $\|\cdot\|_{H^1(\omega) \times H^1(\omega) \times L^2(\omega)}$.

On considère une famille de coques membranaires linéairement élastiques de type elliptique, ayant toutes la même surface moyenne $\boldsymbol{\theta}(\bar{\omega})$ et d'épaisseur $2\varepsilon > 0$. Pour chaque $\varepsilon > 0$, soit

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\varepsilon) = (u_i(\varepsilon)) \in \mathbf{U}(\varepsilon; \Omega) &:= \{\mathbf{v} = (v_i) \in \mathbf{H}^1(\Omega); \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ sur } \gamma \times]-1, 1[, \\ &\quad (\boldsymbol{\theta}(y) + \varepsilon x_3 \mathbf{a}_3(y) + v_i(x) \mathbf{g}^i(\varepsilon)(x)) \cdot \mathbf{p} \geq 0 \text{ pour presque tout } x = (y, x_3) \in \Omega\} \end{aligned}$$

la solution unique du problème $\mathcal{P}(\varepsilon; \Omega)$ (cf. Theorem 3.1).

Alors, il existe des fonctions $u_\alpha \in H^1(\Omega)$ et $u_3 \in L^2(\Omega)$ indépendantes de la variable x_3 telles que

$$\begin{aligned} u_\alpha &= 0 \text{ sur } \gamma \times]-1, 1[, \\ u_\alpha(\varepsilon) &\rightarrow u_\alpha \text{ dans } H^1(\Omega) \text{ et } u_3(\varepsilon) \rightarrow u_3 \text{ dans } L^2(\Omega). \end{aligned}$$

De plus, la moyenne

$$\bar{\mathbf{u}} = (\bar{u}_i) := \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \mathbf{u} dx_3 \in \mathbf{V}_M(\omega)$$

vérifie

$$\bar{\mathbf{u}} = \boldsymbol{\zeta},$$

où $\boldsymbol{\zeta}$ est la solution unique du problème bidimensionnel $\mathcal{P}_M(\omega)$: trouver $\boldsymbol{\zeta} = (\zeta_i) \in \mathbf{U}_M(\omega)$ qui vérifie les inéquations variationnelles

$$\int_{\omega} a^{\alpha\beta\sigma\tau} \gamma_{\sigma\tau}(\boldsymbol{\zeta}) \gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\zeta}) \sqrt{a} dy \geq \int_{\omega} p^i (\eta_i - \zeta_i) \sqrt{a} dy \text{ pour tout } \boldsymbol{\eta} = (\eta_i) \in \mathbf{U}_M(\omega),$$

où

$$a^{\alpha\beta\sigma\tau} := \frac{4\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} a^{\alpha\beta} a^{\sigma\tau} + 2\mu (a^{\alpha\sigma} a^{\beta\tau} + a^{\alpha\tau} a^{\beta\sigma}) \text{ et } p^i := \int_{-1}^1 f^i dx_3.$$

Esquisse de la preuve (on trouvera la démonstration complète dans [7]). Si le principe de la preuve est analogue à celui de la preuve du Théorème 4.4-1 de [1] (adapté du Théorème 5.1 de [6]) qui s'applique à des coques non assujetties à une condition de confinement, la prise en compte d'une telle condition rend en revanche la preuve de la convergence beaucoup plus longue et délicate ; pour cette raison, celle-ci n'est que très brièvement décrite ici.

Comme dans [1], on commence par établir l'existence d'une suite extraite, encore notée $(\mathbf{u}(\varepsilon))_{\varepsilon > 0}$, et de fonctions $u_\alpha \in H^1(\Omega)$, $u_3 \in L^2(\Omega)$ et $e_{i||j} \in L^2(\Omega)$ telles que (on note \rightarrow la convergence forte et \rightharpoonup la convergence faible lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$)

$$\begin{aligned} u_\alpha &= 0 \text{ dans } \gamma \times]-1, 1[, \\ u_\alpha(\varepsilon) &\rightharpoonup u_\alpha \text{ dans } H^1(\Omega) \text{ et } u_\alpha(\varepsilon) \rightarrow u_\alpha \text{ dans } L^2(\Omega), \quad u_3(\varepsilon) \rightharpoonup u_3 \text{ dans } L^2(\Omega), \\ e_{i||j}(\varepsilon) &:= e_{i||j}(\varepsilon; \mathbf{u}(\varepsilon)) \rightharpoonup e_{i||j} \text{ dans } L^2(\Omega). \end{aligned}$$

À cette fin, on fait $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ dans les inégalités variationnelles du problème $\mathcal{P}(\varepsilon; \Omega)$ et on utilise la définie positivité uniforme du tenseur $(A^{ijkl}(\varepsilon))$ (Théorème 3.2) et l'inégalité de Korn du Théorème 3.3. On montre aussi, à l'aide de raisonnements analogues à ceux de [1], que

$$\begin{aligned} \partial_3 u_\alpha &= 0 \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ et } \partial_3 u_3 = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega), \\ \bar{\mathbf{u}} \in \mathbf{U}_M(\omega) &:= \{\boldsymbol{\eta} = (\eta_i) \in H_0^1(\omega) \times H_0^1(\omega) \times L^2(\omega); \\ &\quad (\boldsymbol{\theta}(y) + \eta_i(y)\mathbf{a}^i(y)) \cdot \mathbf{p} \geq 0 \text{ pour presque tout } y \in \omega\}. \end{aligned}$$

Une nouveauté essentielle par rapport à [1], et techniquement quelque peu délicate, consiste ensuite à établir l'existence d'une constante $\varepsilon_0 > 0$ telle que, pour tout champ de vecteurs $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_i) \in \mathcal{D}(\Omega) := \mathcal{D}(\Omega; \mathbb{R}^3)$, il existe une constante $C(\boldsymbol{\varphi})$ et un champ de vecteurs $\mathbf{v}(\varepsilon; \boldsymbol{\varphi}) = (v_i(\varepsilon; \boldsymbol{\varphi}))$ vérifiant

$$\mathbf{v}(\varepsilon; \boldsymbol{\varphi}) \in \mathbf{U}(\varepsilon; \Omega) \text{ et } \partial_3 v_i(\varepsilon; \boldsymbol{\varphi}) = \varphi_i \text{ in } \Omega \text{ pour tout } 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0,$$

et

$$\|\mathbf{v}(\varepsilon; \boldsymbol{\varphi})\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \leq C(\boldsymbol{\varphi}) \text{ pour tout } 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0.$$

Utilisant de tels champs de vecteurs $\mathbf{v}(\varepsilon; \boldsymbol{\varphi})$ dans les inéquations variationnelles du problème $\mathcal{P}(\varepsilon; \Omega)$, on montre alors, grâce au comportement asymptotique des fonctions $A^{ijkl}(\varepsilon)$ et $g(\varepsilon)$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ (Théorème 3.2), que

$$\int_{\Omega} \left((2\mu a^{\alpha\sigma} e_{\sigma\parallel 3}) \varphi_\alpha + (\lambda a^{\sigma\tau} e_{\sigma\parallel\tau} + (\lambda + 2\mu) e_{3\parallel 3}) \varphi_3 \right) \sqrt{ad}x \geq 0$$

pour tout champ de vecteurs $(\varphi_i) \in \mathcal{D}(\Omega)$, d'où l'on déduit que

$$e_{\sigma\parallel 3} = 0 \text{ et } \lambda a^{\sigma\tau} e_{\sigma\parallel\tau} + (\lambda + 2\mu) e_{3\parallel 3} = 0 \text{ dans } L^2(\Omega).$$

Par ailleurs, les convergences faibles $u_\alpha(\varepsilon) \rightharpoonup u_\alpha$ dans $H^1(\Omega)$ et $u_3(\varepsilon) \rightharpoonup u_3$ dans $L^2(\Omega)$ établies plus haut combinées au comportement asymptotique des fonctions $\Gamma_{\alpha\beta}^p(\varepsilon)$ (Théorème 3.2) montrent que

$$\begin{aligned} e_{\alpha\parallel\beta}(\varepsilon) &= \frac{1}{2} (\partial_\alpha u_\beta(\varepsilon) + \partial_\beta u_\alpha(\varepsilon)) - \Gamma_{\alpha\beta}^p(\varepsilon) u_p(\varepsilon) \rightharpoonup \\ e_{\alpha\parallel\beta} &= \frac{1}{2} (\partial_\alpha u_\beta + \partial_\beta u_\alpha) - \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma u_\sigma - b_{\alpha\beta} u_3 \text{ dans } L^2(\Omega), \end{aligned}$$

et donc que les limites faibles $e_{\alpha\parallel\beta}$ et $e_{3\parallel 3}$ sont elles aussi indépendantes de la variable x_3 .

Le tenseur $(a^{\alpha\beta\sigma\tau})$, où

$$a^{\alpha\beta\sigma\tau} := \frac{4\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} a^{\alpha\beta} a^{\sigma\tau} + 2\mu (a^{\alpha\sigma} a^{\beta\tau} + a^{\alpha\tau} a^{\beta\sigma})$$

est uniformément défini positif dans $\bar{\omega}$ (cf. [1, Théorème 3.3-2]). L'inégalité de Korn sur une surface elliptique (Théorème 1.1) montre alors que le problème bidimensionnel $\mathcal{P}_M(\omega)$: trouver

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\zeta} \in \mathbf{U}_M(\omega) &:= \{\boldsymbol{\eta} = (\eta_i) \in H_0^1(\omega) \times H_0^1(\omega) \times L^2(\omega); \\ &\quad (\boldsymbol{\theta}(y) + \eta_i(y)\mathbf{a}^i(y)) \cdot \mathbf{p} \geq 0 \text{ pour presque tout } y \in \omega\} \end{aligned}$$

qui vérifie les inéquations variationnelles

$$\int_{\omega} a^{\alpha\beta\sigma\tau} \gamma_{\sigma\tau}(\boldsymbol{\zeta}) \gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\zeta}) \sqrt{ad}y \geq \int_{\omega} p^i (\eta_i - \zeta_i) \sqrt{ad}y \text{ pour tout } \boldsymbol{\eta} = (\eta_i) \in \mathbf{U}_M(\omega),$$

a une et une seule solution.

Définissons l'ensemble

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{U}}_M(\omega) &:= \{\boldsymbol{\eta} = (\eta_i) \in H_0^1(\omega) \times H_0^1(\omega) \times H_0^1(\omega); \\ &\quad (\boldsymbol{\theta}(y) + \eta_i(y)\mathbf{a}^i(y)) \cdot \mathbf{p} \geq 0 \text{ pour presque tout } y \in \omega\}. \end{aligned}$$

Alors, utilisant «l'hypothèse de densité» satisfaite par l'immersion $\boldsymbol{\theta}$, on montre que, si un champ de vecteurs $\bar{\mathbf{u}} = (\bar{u}_i) : \bar{\omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$ satisfait

$$\bar{\mathbf{u}} \in \mathbf{U}_M(\omega) \text{ et } \int_{\omega} a^{\alpha\beta\sigma\tau} \gamma_{\sigma\tau}(\bar{\mathbf{u}}) \gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta} - \bar{\mathbf{u}}) \sqrt{ad}y \geq \int_{\omega} p^i (\eta_i - \bar{u}_i) \sqrt{ad}y \text{ pour tout } \boldsymbol{\eta} = (\eta_i) \in \tilde{\mathbf{U}}_M(\omega),$$

alors

$$\bar{\mathbf{u}} = \boldsymbol{\zeta}.$$

Utilisant l'autre hypothèse satisfaite par $\boldsymbol{\theta}$, à savoir

$$d := \inf_{y \in \bar{\omega}} (\boldsymbol{\theta}(y) \cdot \mathbf{p}) > 0,$$

on établit en outre l'existence de constantes $\varepsilon_1(d)$ et $C(d) > 0$ telles que, pour tout $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$ et pour tout champ de vecteurs $\boldsymbol{\eta} \in \tilde{\mathbf{U}}_M(\omega)$, il existe un champ de vecteurs $\tilde{\mathbf{v}}(\varepsilon; \boldsymbol{\eta}) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ tel que (la notation $\gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta})$ dans la deuxième relation ci-dessous désigne l'extension à Ω indépendante de x_3 de la fonction $\gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta}) \in L^2(\omega)$ définie plus haut)

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{v}}(\varepsilon; \boldsymbol{\eta}) &\in \mathbf{U}(\varepsilon; \Omega) \text{ pour tout } 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1(d) \text{ et } \tilde{\mathbf{v}}(\varepsilon; \boldsymbol{\eta}) \rightarrow \boldsymbol{\eta} \text{ dans } \mathbf{H}^1(\Omega) \text{ lorsque } \varepsilon \rightarrow 0, \\ e_{\alpha\|\beta}(\varepsilon; \tilde{\mathbf{v}}(\varepsilon; \boldsymbol{\eta})) &\rightarrow \gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta}) \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ lorsque } \varepsilon \rightarrow 0, \\ \|e_{\alpha\|\beta}(\varepsilon; \tilde{\mathbf{v}}(\varepsilon; \boldsymbol{\eta}))\|_{L^2(\Omega)} &\leq C(d) \text{ pour tout } 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1(d), \\ e_{3\|\beta}(\varepsilon; \tilde{\mathbf{v}}(\varepsilon; \boldsymbol{\eta})) &\rightarrow 0 \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ lorsque } \varepsilon \rightarrow 0. \end{aligned}$$

À cette fin, on remarque qu'un choix possible est

$$\tilde{\mathbf{v}}(\varepsilon; \boldsymbol{\eta}) = (\tilde{v}_i(\varepsilon; \boldsymbol{\eta})) \text{ avec } \tilde{v}_i(\varepsilon; \boldsymbol{\eta}) := ((1 - \sqrt{\varepsilon})\eta_j \mathbf{a}^j) \cdot \mathbf{g}_i(\varepsilon).$$

On sait déjà que

$$\bar{\mathbf{u}} = (\bar{u}_i), \text{ où } \bar{u}_i := \frac{1}{2} \int_{-1}^1 u_i dx_3,$$

vérifie

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{u}} \in \mathbf{U}_M(\omega) &:= \{\boldsymbol{\eta} = (\eta_i) \in H_0^1(\omega) \times H_0^1(\omega) \times L^2(\omega); \\ &(\boldsymbol{\theta}(y) + \eta_i(y) \mathbf{a}^i(y)) \cdot \mathbf{p} \geq 0 \text{ pour presque tout } y \in \omega\}. \end{aligned}$$

Posons, pour $0 < \varepsilon \leq \min\{1, \varepsilon_0, \varepsilon_1(d)\}$,

$$\Lambda(\varepsilon) := \int_{\Omega} A^{ijkl}(\varepsilon)(e_{k\|\ell}(\varepsilon) - e_{k\|\ell}(\varepsilon))(e_{i\|j}(\varepsilon) - e_{i\|j}(\varepsilon))\sqrt{g(\varepsilon)} dx,$$

de sorte que l'on a déjà (Théorème 3.2)

$$0 \leq \sum_{i,j} \|e_{i\|j}(\varepsilon) - e_{i\|j}(\varepsilon)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{C_0}{\sqrt{g_0}} \Lambda(\varepsilon).$$

Par ailleurs, étant donné un champ de vecteurs quelconque $\boldsymbol{\eta} = (\eta_i) \in \tilde{\mathbf{U}}_M(\omega)$, utilisons le champ de vecteurs $\tilde{\mathbf{v}}(\varepsilon; \boldsymbol{\eta}) \in \mathbf{U}(\varepsilon; \Omega)$ défini plus haut dans les inéquations variationnelles du problème $\mathcal{P}(\varepsilon; \Omega)$. Ceci donne

$$\begin{aligned} 0 \leq \Lambda(\varepsilon) &= \int_{\Omega} A^{ijkl}(\varepsilon)e_{k\|\ell}(\varepsilon)e_{i\|j}(\varepsilon)\sqrt{g(\varepsilon)} dx \\ &\quad - 2 \int_{\Omega} A^{ijkl}(\varepsilon)e_{k\|\ell}(\varepsilon)e_{i\|j}(\varepsilon)\sqrt{g(\varepsilon)} dx + \int_{\Omega} A^{ijkl}(\varepsilon)e_{k\|\ell}(\varepsilon)e_{i\|j}(\varepsilon)\sqrt{g(\varepsilon)} dx \\ &\leq \int_{\Omega} A^{ijkl}(\varepsilon)e_{k\|\ell}(\varepsilon)e_{i\|j}(\varepsilon; \tilde{\mathbf{v}}(\varepsilon; \boldsymbol{\eta}))\sqrt{g(\varepsilon)} dx \\ &\quad - 2 \int_{\Omega} A^{ijkl}(\varepsilon)e_{k\|\ell}(\varepsilon)e_{i\|j}(\varepsilon)\sqrt{g(\varepsilon)} dx + \int_{\Omega} A^{ijkl}(\varepsilon)e_{k\|\ell}(\varepsilon)e_{i\|j}(\varepsilon)\sqrt{g(\varepsilon)} dx \\ &\quad - \int_{\Omega} f^i(\tilde{v}_i(\varepsilon; \boldsymbol{\eta}) - u_i(\varepsilon))\sqrt{g(\varepsilon)} dx. \end{aligned}$$

Passant à la limite lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ dans les divers termes de cette relation, en utilisant le comportement asymptotique des fonctions $A^{ijkl}(\varepsilon)$ et $g(\varepsilon)$, les convergences faibles $e_{i\|j}(\varepsilon) \rightharpoonup e_{i\|j}$ dans $L^2(\Omega)$, l'indépendance en x_3 des limites faibles u_i et $e_{i\|j}$ et le comportement asymptotique des fonctions $e_{i\|j}(\varepsilon; \tilde{\mathbf{v}}(\varepsilon; \boldsymbol{\eta}))$, on obtient

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} A^{ijkl}(\varepsilon) e_{k||\ell}(\varepsilon) e_{i||j}(\varepsilon; \tilde{\mathbf{v}}(\varepsilon; \boldsymbol{\eta})) \sqrt{g(\varepsilon)} dx \\ & \rightarrow \int_{\Omega} \left(A^{\alpha\beta\sigma\tau}(0) e_{\sigma||\tau} \gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta}) + A^{\alpha\beta 33}(0) e_{3||3} \gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta}) \right) \sqrt{a} dx \\ & = \int_{\omega} a^{\alpha\beta\sigma\tau} \gamma_{\sigma\tau}(\bar{\mathbf{u}}) \gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta}) \sqrt{a} dy, \\ & 2 \int_{\Omega} A^{ijkl}(\varepsilon) e_{k||\ell}(\varepsilon) e_{i||j} \sqrt{g(\varepsilon)} dx - \int_{\Omega} A^{ijkl}(\varepsilon) e_{k||\ell} e_{i||j} \sqrt{g(\varepsilon)} dx \\ & \rightarrow \int_{\Omega} A^{ijkl}(0) e_{k||\ell} e_{i||j} \sqrt{a} dx = \int_{\omega} a^{\alpha\beta\sigma\tau} \gamma_{\sigma\tau}(\bar{\mathbf{u}}) \gamma_{\alpha\beta}(\bar{\mathbf{u}}) \sqrt{a} dy, \\ & \int_{\Omega} f^i(\tilde{\mathbf{v}}_i(\varepsilon; \boldsymbol{\eta}) - u_i(\varepsilon)) \sqrt{g(\varepsilon)} dx \rightarrow \int_{\Omega} f^i(\eta_i - u_i) \sqrt{a} dx = \int_{\omega} p^i(\eta_i - \bar{u}_i) \sqrt{a} dy. \end{aligned}$$

Comme $\Lambda(\varepsilon) \geq 0$ pour tout $\varepsilon > 0$, le champ de vecteurs $\bar{\mathbf{u}} \in \mathbf{U}_M(\omega)$ satisfait donc les inéquations variationnelles

$$\int_{\omega} a^{\alpha\beta\sigma\tau} \gamma_{\sigma\tau}(\bar{\mathbf{u}}) \gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta} - \bar{\mathbf{u}}) \sqrt{a} dy \geq \int_{\omega} p^i(\eta_i - \bar{u}_i) \sqrt{a} dy$$

pour tout champ de vecteurs $\boldsymbol{\eta} \in \tilde{\mathbf{U}}_M(\omega)$, et donc

$$\bar{\mathbf{u}} = \boldsymbol{\zeta},$$

puisque la solution du problème $\mathcal{P}_M(\omega)$ est unique (cette propriété a été établie plus haut). Ceci montre aussi que

$$u_{\alpha}(\varepsilon) \rightharpoonup u_{\alpha} \text{ dans } H^1(\Omega) \text{ et } u_3(\varepsilon) \rightharpoonup u_3 \text{ dans } L^2(\Omega)$$

pour toute la famille $(\mathbf{u}(\varepsilon))_{\varepsilon>0}$, i.e. pas seulement pour une suite extraite. De même, la convergence faible

$$e_{i||j}(\varepsilon) \rightharpoonup e_{ij} \text{ dans } L^2(\Omega)$$

a lieu pour toute la famille $(e_{i||j}(\varepsilon))_{\varepsilon>0}$.

On établit ensuite assez facilement, en utilisant « l'hypothèse de densité », que

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \Lambda(\varepsilon) = 0,$$

et donc que $\Lambda(\varepsilon) \rightarrow 0$ puisque $\Lambda(\varepsilon) \geq 0$ pour tout $\varepsilon > 0$. L'inégalité

$$0 \leq \sum_{i,j} \|e_{i||j}(\varepsilon) - e_{ij}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{C_0}{\sqrt{g_0}} \Lambda(\varepsilon)$$

montre alors que

$$e_{i||j}(\varepsilon) \rightarrow e_{ij} \text{ dans } L^2(\Omega).$$

On termine la démonstration comme dans [1], en montrant que

$$\begin{aligned} \overline{u_{\alpha}(\varepsilon)} & := \frac{1}{2} \int_{-1}^1 u_{\alpha}(\varepsilon) dx_3 \rightarrow \bar{u}_{\alpha} \text{ dans } H^1(\omega), \\ \overline{u_3(\varepsilon)} & := \frac{1}{2} \int_{-1}^1 u_3(\varepsilon) dx_3 \rightarrow \bar{u}_3 \text{ dans } L^2(\omega) \end{aligned}$$

et que, en fait,

$$u_{\alpha}(\varepsilon) \rightarrow u_{\alpha} \text{ dans } H^1(\Omega) \text{ et } u_3(\varepsilon) \rightarrow u_3 \text{ dans } L^2(\Omega). \quad \square$$

Il reste évidemment à faire l'opération inverse de la mise à l'échelle, c'est-à-dire à « revenir à l'ouvert Ω^ε », ce qui n'offre aucune difficulté particulière. C'est ainsi que l'on établit que

$$\frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} u_\alpha^\varepsilon \mathbf{g}^{\alpha,\varepsilon} dx_3^\varepsilon \rightarrow \zeta_\alpha \mathbf{a}^\alpha \text{ dans } \mathbf{H}^1(\omega),$$

$$\frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} u_3^\varepsilon \mathbf{g}^{3,\varepsilon} dx_3^\varepsilon \rightarrow \zeta_3 \mathbf{a}^3 \text{ dans } \mathbf{L}^2(\omega).$$

5. Une condition suffisante pour que « l'hypothèse de densité » soit satisfaite

On notera, d'une part, que la condition suffisante donnée dans le résultat qui suit *ne suppose pas* la surface $\theta(\bar{\omega})$ elliptique, et, d'autre part, qu'en fait, un ensemble « beaucoup plus petit que $\tilde{\mathbf{U}}_M(\omega)$ », à savoir $\mathbf{U}_M(\omega) \cap \mathcal{D}(\omega)$, est déjà dense dans $\mathbf{U}_M(\omega)$.

Théorème 5.1. Soit $\theta \in \mathcal{C}^2(\bar{\omega}; \mathbb{E}^3)$ une immersion telle qu'il existe un vecteur $\mathbf{p} \in \mathbb{E}^3$ non nul tel que

$$\inf_{y \in \bar{\omega}} (\theta(y) \cdot \mathbf{p}) > 0 \text{ et } \inf_{y \in \bar{\omega}} (\mathbf{a}_3(y) \cdot \mathbf{p}) > 0.$$

On définit les ensembles

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_M(\omega) &:= \{\boldsymbol{\eta} = (\eta_i) \in H_0^1(\omega) \times H_0^1(\omega) \times L^2(\omega); \\ &\quad (\theta(y) + \eta_i(y) \mathbf{a}^i(y)) \cdot \mathbf{p} \geq 0 \text{ pour presque tout } y \in \omega\}, \\ \mathbf{U}_M(\omega) \cap \mathcal{D}(\omega) &:= \{\boldsymbol{\eta} = (\eta_i) \in \mathcal{D}(\omega) \times \mathcal{D}(\omega) \times \mathcal{D}(\omega); \\ &\quad (\theta(y) + \eta_i(y) \mathbf{a}^i(y)) \cdot \mathbf{p} \geq 0 \text{ pour tout } y \in \omega\}. \end{aligned}$$

Alors, l'ensemble $\mathbf{U}_M(\omega) \cap \mathcal{D}(\omega)$ est dense dans l'ensemble $\mathbf{U}_M(\omega)$ muni de la norme $\|\cdot\|_{H^1(\omega) \times H^1(\omega) \times L^2(\omega)}$.

Démonstration. On se reportera à [7] pour la preuve, assez longue et technique. On se contentera de dire ici qu'elle consiste à établir « l'hypothèse de densité » successivement pour des sous-ensembles « de plus en plus petits » de l'ensemble $\mathbf{U}_M(\omega)$, à savoir les ensembles

$$\begin{aligned} &\mathbf{U}_M(\omega) \cap \left(L^\infty(\omega) \times L^\infty(\omega) \times L^2(\omega) \right), \\ &\mathbf{U}_M(\omega) \cap \left(L^\infty(\omega) \times L^\infty(\omega) \times L^\infty(\omega) \right), \\ &\{\boldsymbol{\eta} \in \mathbf{U}_M(\omega) \cap \left(L^\infty(\omega) \times L^\infty(\omega) \times L^\infty(\omega) \right); \text{ il existe} \\ &\quad \delta^\sharp(\boldsymbol{\eta}) > 0 \text{ tel que } \boldsymbol{\eta} = \mathbf{0} \text{ in } \{y \in \omega; \text{dist}(y; \gamma) < \delta^\sharp(\boldsymbol{\eta})\} \\ &\quad \text{et } (\theta(y) + \eta_i(y) \mathbf{a}^i(y)) \cdot \mathbf{p} \geq d\delta^\sharp(\boldsymbol{\eta}) \text{ pour presque tout } y \in \omega\}, \\ &\mathbf{U}_M(\omega) \cap \mathcal{D}(\omega). \quad \square \end{aligned}$$

Remerciements

Ce travail a été financé par une bourse du Research Grants Council of the Hong Kong Special Administrative Region, China [projet n° 9042536, CityU 11300317].

Références

- [1] P.G. Ciarlet, *Mathematical Elasticity, vol. III: Theory of Shells*, North-Holland, Amsterdam, 2000.
- [2] P.G. Ciarlet, *An Introduction to Differential Geometry with Applications to Elasticity*, Springer, Dordrecht, 2005.
- [3] P.G. Ciarlet, *Linear and Nonlinear Functional Analysis with Applications*, SIAM, Philadelphia, 2013.
- [4] P.G. Ciarlet, P. Destuynder, A justification of the two-dimensional linear plate model, *J. Méc.* 18 (1979) 315–344.
- [5] P.G. Ciarlet, V. Lods, On the ellipticity of linear membrane shell equations, *J. Math. Pures Appl.* 75 (1996) 107–124.
- [6] P.G. Ciarlet, V. Lods, Asymptotic analysis of linearly elastic shells. I. Justification of membrane shell equations, *Arch. Ration. Mech. Anal.* 136 (1996) 119–161.
- [7] P.G. Ciarlet, C. Mardare, P. Piersanti, An obstacle problem for elliptic membrane shells, *Math. Mech. Solids*, to appear.
- [8] P.G. Ciarlet, E. Sanchez-Palencia, An existence and uniqueness theorem for the two-dimensional linear membrane shell equations, *J. Math. Pures Appl.* 75 (1996) 51–67.

- [9] G. Duvaut, J.-L. Lions, *Inequalities in Mechanics and Physics*, Springer, Berlin, 1976; translation of the original French edition, *Les inéquations en mécanique et en physique*, Dunod, Paris, 1972.
- [10] R. Glowinski, *Numerical Methods for Nonlinear Variational Problems*, Springer, New York, 1984.
- [11] A. Léger, B. Miara, Mathematical justification of the obstacle problem in the case of a shallow shell, *J. Elast.* 90 (2008) 241–257.
- [12] A. Léger, B. Miara, A linearly elastic shell over an obstacle: the flexural case, *J. Elast.* 131 (2018) 19–38.
- [13] A. Rodríguez-Arós, Mathematical justification of the obstacle problem for elastic elliptic membrane shells, *Appl. Anal.* 97 (2018) 1261–1280.